Autour de la fonction Zêta de Riemann

Maître de stage : Yang Hui He

Tuteur école : Thibaut LEGOUIC

EL HASSANI Ansar

Department of Mathematics
City University of London

Rapport de stage de recherche
Stage S8 recherche international

Ecole Centrale Marseille February 2017

Remerciements

J’aimerais remercier mon Maître de stage Yang Hui He pour tout le temps et les discussions qu’il m’a accordé plusieurs fois par semaines durant toutes la durée du stage .
Je remercie mes collègues doctorants de m’avoir présenter leurs travailles , pour m’avoir expliqué quelques concepts et pour le temps qu’on a partagé ensemble .
Je remercie mes colocataires , avec qui ce séjour a Londres était une excellente expérience .
Je remercie Oumaima SADIKI , Ibtihaj SADIKI , Olivier ROUX , Mohammed ALLALI , Nizar Bellazrak et plus particulièrement Mon Père pour leurs nombreuses corrections et leurs relectures .
Je remercie Olivier Ramaré pour sa relecture ainsi que ses très nombreuses corrections et commentaires .
Je remercie mes parents , ma famille et mes amis pour tout .

Abstract

In the first chapter, we will present a computation of the square value of the module of L functions associated to a Dirichlet character.
This computation suggests to ask if a certain ring of arithmetic multiplicative functions exists and if it is unique. This search has led to the construction of that ring in chapter two.
Finally, in the third chapter, we will present some propositions associated with this ring. The result below is one of the main results of this work.

Dans le premier chapitre, je présente un calcul du module au carré des fonctions L associé à un caractère de Dirichlet.
Ce calcul m'a poussé à explorer l'existence et l'unicité d'un certain anneau de fonctions arithmétiques multiplicatives que je construis par la suite dans le chapitre deux.
Enfin, dans le chapitre trois, je présente quelques propositions associées à cet anneau.
Un des résultats principaux est présenté ci-dessous:

For F and G two completely multiplicative functions, s a complex number such as the dirichlet series $D(F,s)$ and $D(G,s)$ converge :

$$\forall F,G \in \mathbb{M}_c : D(F,s) \times D(G,s) = D(F \times G, 2s) \times D(F \square G, s)$$

Here are some similar versions, with $s = x + iy$:

$$\forall F,G \in \mathbb{M}_c :\ D(F,s) \times D(G,\overline{s}) = D(F \times G, 2x) \times D(\frac{F}{\mathrm{Id}_e^{iy}} \square \frac{G}{\mathrm{Id}_e^{-iy}}, x)$$

$$\forall F,G \in \mathbb{M}_c :\ |D(F,s)|^2 = D(|F|^2, 2x) \times D(\frac{F}{\mathrm{Id}_e^{iy}} \square \overline{\frac{F}{\mathrm{Id}_e^{iy}}}, x)$$

Table of contents

Chapitre 1

Factorisation du Module au carré des fonctions L

1.1 Présentation du problème

1.1.1 La fonction zêta

La série zêta a été découverte par Leonhard Euler et est définie comme suit :

$$\forall s \in \mathbb{C},\ \Re(s) > 1\ \ \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ n'est pas convergente pour $\Re(s) \leq 1$, néanmoins on peut définir un prolongement (unique au sens du prolongement analytique) sur tout le plan complexe, sauf en $s = 1$.

Ce prolongement analytique est ce qu'on appelle la fonction zêta [1] [11] .

1.1.2 Le produit Eulérien

Euler a aussi a établi le produit "Eulérien" associé à la fonction zêta :

$$\forall s \in \mathbb{C},\ \Re(s) > 1\ \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

Pour comprendre plus facilement l'importance de cette formule , il est plus adéquat de l'écrire comme ceci :

$$\forall s \in \mathbb{C},\ \Re(s) > 1\ \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \prod_{p \in \mathbb{P}} 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \dots$$

$$\forall s \in \mathbb{C},\ \Re(s) > 1\ \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots$$

L'idée est que la formule $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ présente les entiers en tant que suite de nombres espacés par un pas de 1 *(vision additive / métrique)* , alors que la formule $\prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$ exprime les entiers en tant que combinaison de différentes puissances de nombres premiers *(vision multiplicative / combinatoire).*

1.1.3 Equation fonctionnelle

Riemann a prouvé [11] que la fonction zêta vérifie l'équation fonctionnelle suivante :

$$\forall s \in \mathbb{C} - 1\ :\ \zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

Ce résultat exprime une relation entre les valeurs $\zeta(s)$ et $\zeta(1-s)$, et plus particulièrement , il dit que l'ensemble des zéros de la fonction zêta est symétrique par rapport à la droite $\Re(s) = \frac{1}{2}$.

1.1.4 L'Hypothèse de Riemann

Bernhard Riemann est un des meilleurs mathématiciens de son époque . Il connaissait bien le domaine des transformées de Fourier et il avait réussi à lier la théorie des nombres à celle des fonctions à variables complexes . Dans un certain sens , il a trouvé que la transformée de Fourier de l'ensemble des nombres premiers , et cela dans le seul article [11] (très court) sur la théorie des nombres qu'il a écrit.

Il a compris que la fonction zêta avait des liens importants avec les nombres premiers , son travail a débouché sur une formule exacte qui permet de trouver l'emplacement de chaque nombre premier :

La fonction *li*, dîte logarithme intégral, est définie par :

$$\mathrm{li}(x) = \int_0^{\infty} \frac{dt}{\ln(t)}$$

ρ sont les zéros non triviaux de la fonction zéta :

$$\forall \rho \ : \ \zeta(\rho) = 0 \ , \ 0 < \Re(\rho) < 1$$

ψ est une fonction qui permet de retrouver la fonction de comptage π , nous n'aurons pas besoin de sa définition précise .

$$\psi(x) = \mathrm{li}(x) - \sum_{\rho} \mathrm{li}(x^{\rho}) - \log(2) + \int_{x}^{\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)\log(t)}$$

Cette formule a malheureusement un problème important : elle contient une somme sur les zéros non triviaux ρ (c'est à dire de partie réel $0 < \Re(\rho) < 1$) de la fonction zêta . L'étude des zéros de la fonction zêta prend alors beaucoup d'importance , l'hypothèse qu'avait fait Riemann était que tout les zéros avec leur partie réel égale à $\frac{1}{2}$.

1.1.5 Le théorème des nombres premiers

L'ordre dans les nombres premiers

Le théorème des nombres premiers dit :

$$\pi(x) \sim \mathrm{li}(x)$$

Où π est la fonction de comptage des nombres premiers .
l'Hypothèse de Riemann est équivalente au résultat suivant :

$$\pi(x) = Li(x) + O(\sqrt{x} \cdot \ln(x))$$

Où π est la fonction de comptage des nombres premiers .

l'Hypothèse de Riemann complète alors le Théorème des Nombres Premiers en précisant l'ampleur des fluctuations entre $\pi(x)$ et $li(x)$.

il est aussi très intéressant de savoir que l'un des points clefs des premières preuves du théorème des nombres premiers est l'absence de zéro sur la droite $\Re(s) = 1$.
Il faut se rappeler que les zéros de la fonction zêta sont liés par la transformée de Fourrier au nombres premiers , ils peuvent alors être interprétés comme les notes de la musique des nombres premiers (ceci reste une interprétation simplifier) . Si elle s'avère correcte

, L'hypothèse de Riemann correspond alors à une régularité ordonné sur l'ensemble des nombres premiers .

Le chaos dans les nombres premiers

Voici un autre équivalent de l'hypothèse de Riemann , Trouvé par Landau dans sa thèse (longue de 13 page) [19] :

$$\forall \varepsilon > 0 \ : \ \lim_{n \to \infty} \frac{\lambda(1) + \lambda(2) + \lambda(3) + \ldots + \lambda(n)}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} = 0$$

Où $\lambda(l) = (-1)^{\omega(l)}$ et $\omega(l)$ le nombre de nombres premiers distincts dans la décomposition de l .

Une première interprétation de cette limite est que les $(-1)^{\omega(l)}$ donnent une suite de pas dans $\mathbb{Z}$, le $\frac{1}{2}$ qui apparait dans la prédiction $\Re(s) = \frac{1}{2}$ de l'hypothèse de Riemann correspond alors à la racine carré obtenue en utilisant dans le théorème central limite lors du calcul de la distance à l'origine d'une marche aléatoire unidimensionnelle et isotrope pour un grand nombre de pas , un article de França et Leclair observe les mêmes phénomènes sur d'autres grandeurs liées à la théorie des nombres [10] .

Cela signifierait que certaines caractéristiques (ici $\omega(l)$) des nombres premiers sont distribuées aléatoirement . Ce qui a priori est contradictoire avec la première interprétation .

les nombres premiers : l'ordre dans le chaos

L'idée est que les deux interprétations sont complémentaires :

L'Hypothèse de Riemann décrit un schéma , une régularité que les nombres premiers sont censés suivre . Ce schéma c'est le fait qu'ils sont , au moins en partie , distribués aléatoirement . Le fait de savoir cette information nous permet de mieux les encadrer .

L'article de Riemann a impressionné les mathématiciens de l'époque , particulièrement grâce aux liens qu'il met en évidence entre deux disciplines mathématiques distantes . La recherche a alors commencé pour prouver "l'Hypothèse" que Riemann a laissée , leurs efforts n'ont malheureusement pas abouti à ce jour .

1.1.6 Approches de résolution à travers l'histoire

[20] Une des stratégies que les mathématiciens ont appliquée pour tenter de répondre à cette question est la généralisation :
Ils ont essayé de définir plusieurs classes de fonctions qui présentent les mêmes propriétés fondamentales de la fonction zêta (Produit Eulérien , Équation Fonctionnelle , Hypothèse de Riemann ...) et cherché à comprendre ces nouvelles fonctions . Cela permet de ne se concentrer que sur les propriétés importantes reliées à l'Hypothèse de Riemann .

Plusieurs classes de fonctions ont ainsi été définies :

les fonctions L , la classe de Selberg , les fonctions zêta de plusieurs variables , les fonctions zêta de Hurwitz , les fonctions zêta sur des corps finis ...

Certaines de ces classes sont au cœur de grand programme de recherche :

Le programme de Langlands : ce programme essaie de relier plein d'objets mathématiques , particulièrement les formes modulaires et les fonctions L , il est important de noter qu'un des points clefs de la preuve du dernier théorème de Fermat est une correspondance qui s'inscrit dans ce programme.

Un autre programme célèbre est le le programme de Polya-Hilbert dont le but est d'explorer les liens avec l'analyse fonctionnelle , avant de trouvé une interprétation en physique quantique . Un équivalent de l'hypothèse de Riemann physique (la construction d'un certain atome théorique) a été trouvé , et plus récemment , des calculs numériques confirment une conjoncture (Conjecture de Montgomery) qui permet de prévoir plusieurs informations sur les zéros de la fonction zêta.

1.1.7 Preuve de Weil

[13] Sur toutes ces classes , seule l'hypothèse de Riemann sur les corps finis a été prouvée par André Weil , cette preuve étant incomplète , elle a été par la suite complétée par toute une série de travaux de Weil mais aussi Alexandre Grothendieck a travers son ouvrage célèbre *éléments de géométrie algébrique* et Pierre Deligne (en construisant tout un champ de la géométrie algébrique : schémas , cohomologie étale ...)

Ce qu'il faudrait maintenant , c'est d'arriver à reprendre les idées de la preuve de Weil , et de les appliquer au problème de base , mais il se trouve que ce n'est pas très évident .

[21] Le travaille d'Alain Connes s'inscrit dans cette optique . Durant les dernières décennies , Alain Connes a développé une théorie nommée Géométrie Non Commutative après l'étude de certains opérateurs . Il se trouve que dans cette théorie , il a réussi à donner une nouvelle preuve du fait qu'il y est une infinité de zéros sur la droite $\Re(s) = \frac{1}{2}$, ce résultat était prouvé par Hardy différemment. il continue de travailler jusqu'à aujourd'hui sur la question , il a notamment avancé très récemment dans la construction d'un espace qu'il espère convenable pour la compréhension des nombres premiers .

1.1.8 Contexte de ce travail

Mon tuteur avait trouvé un équivalent de la Conjoncture abc en physique théorique (l'Hypothèse de Riemann , la Conjoncture abc et la Conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer sont considérées souvent parmi les problèmes les plus importants de la théorie des nombres) , cette trouvaille a permis de révéler un lien inattendu entre théorie des nombres et physique théorique [22] . Ceci l'a encouragé alors à mieux comprendre l'Hypothèse de Riemann ainsi que les relations avec son domaine .

Mon travail pendant le stage était alors simplement d'explorer l'Hypothèse de Riemann et de permettre à mon maître de stage de mieux la comprendre.

1.2 Définition :

Définition On définit l'ensemble des fonctions multiplicatives comme suit :

$$F \in \mathbb{M} \iff \begin{array}{l} F : \mathbb{N}^\star \longrightarrow \mathbb{C} \\ F(1) = 1 \\ a \wedge b = 1 \Rightarrow F(ab) = F(a)F(b) \end{array}$$

Remarque $\forall a, b \in \mathbb{N}^\star$: $a \wedge b$: désigne le plus grand diviseur commun de a et b

Définition Un caractère de Dirichlet est une fonction multiplicative qui vérifie :

$$\chi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow \chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$$

$$\exists k \in \mathbb{N}^\star, \forall n \in \mathbb{N}\ \chi(n) = \chi(n+k)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star\ n \wedge k > 1 \Rightarrow \chi(n) = 0$$

Remarque Un caractère de Dirichlet définit une fonction multiplicative.

Définition La série de Dirichlet génératrice associée à une fonction multiplicative est :

$$\forall F \in \mathbb{M}, \forall s \in \mathbb{C}, \Re(s) > \sigma :\ D(F,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^s}$$

σ définit une région de $\mathbb{C}$ où la série converge.

Définition Les séries L sont les séries de Dirichlet génératrice associées à un caractère de Dirichlet :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1 :\ L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

Définition Les fonctions L sont le prolongement analytique des séries L :

Définition L'hypothèse de Riemann généralisée (GRH) est l'assertion que la proposition suivante est vraie pour toutes les fonctions L :

$$\forall s \in \mathbb{C}\ ,\ 0 < \Re(s) < 1 : L(\chi,s) = 0 \Rightarrow \Re(s) = \frac{1}{2}$$

La fonction zêta est un cas particulier des fonctions L .

Remarque L'ensemble des nombres complexes tel que $0 < \Re(s) < 1$ est souvent appelé la bande critique .
La droite des nombres complexes définie par $\Re(s) = \frac{1}{2}$ est appelée la ligne critique .

Remarque On va étudier les fonctions L de manière générale , le cas de zêta en découle naturellement .

1.3 Démarche :

Au début de mon stage , je cherchais à trouver parmi les propriétés de la fonction ζ celles qui faisaient apparaître la droite $\Re(z) = \frac{1}{2}$ de manière particulière , un peu comme l'équation fonctionnelle le fait en affirmant que c'est une droite de symétrie de l'ensemble des zéros de ζ.

Après quelque temps à travailler sur le problème , je pensais de plus que la partie imaginaire ne changeait pas beaucoup le problème .
Par exemple , si on réécrit le terme de cette série de la manière suivante :

$$\forall s \in \mathbb{C}-1, \Re(s)>0 : \zeta(s)=\frac{1}{1-2^{1-s}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}=\frac{1}{1-2^{1-s}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \cdot e^{i \cdot(-y ln(n))} \cdot(-1)^{n-1}$$

On a alors :

$$|e^{i \cdot(-y ln(n))} \cdot(-1)^{n-1}|=1$$

le $\frac{1}{2}$ peut alors représenter une vitesse de convergence .
Après cela , j'ai observé que les termes indépendants de la partie imaginaire divergeaient pour $\Re(s)=\frac{1}{2}$ dans le calcul de $|\zeta(s)|^2$ avec la formule

$$\forall s \in \mathbb{C},\ \Re(s)>1\ |\zeta(s)|^2=\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \cdot \frac{1}{q^{\bar{s}}}=\zeta(2 \cdot \Re(s))+\sum_{n,q=1\ n \neq q}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \cdot \frac{1}{q^{\bar{s}}}$$

Ce qui m'a guidé vers une factorisation des séries L .

1.4 Somme selon les couples premiers entre eux :

Lemme 1.4.1 *1* Soit χ un caractère de Dirichlet, soit $L(.,\chi)$ sa série L associée , soit $L_N(.,\chi)$ avec $N \in \mathbb{N}^\star$ la somme partielle de la série L. le module de la somme partielle de la série L:

$$|L_N(z,\chi)|^2=\sum_{n=1}^{N} \sum_{q=1}^{N} \frac{\chi(n)}{n^z} \overline{\frac{\chi(q)}{q^z}}$$

Preuve

$$\begin{aligned} |L_N(z,\chi)|^2 &= \left[\sum_{n=1}^{N} \frac{\chi(n)}{n^z}\right] \times \left[\sum_{q=1}^{N} \overline{\frac{\chi(q)}{q^z}}\right] \\ &= \sum_{n=1}^{N} \sum_{q=1}^{N} \frac{\chi(n)}{n^z} \overline{\frac{\chi(q)}{q^z}} \end{aligned}$$

Lemme 1.4.2 pour tout $a,b \in \mathbb{N}^*$, l'écriture :

$$\begin{cases} (a,b) = (pn,pq) \\ n \wedge q = 1 \\ n,q,p \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

existe et elle est unique

Preuve soit $n \wedge q = 1$ et $e \wedge f = 1$ avec $n,q,e,f \in \mathbb{N}^*$, soit $p,l \in \mathbb{N}^*$:

$$(pn,pq) = (le,lf) \Leftrightarrow \begin{cases} pn = le \\ pq = lf \end{cases} \Rightarrow \frac{n}{q} = \frac{e}{f} \Rightarrow nf = qe$$

en utilisant le lemme de gauss :
$nf = qe$ et $n \wedge q = 1$ donc $n|e$
$nf = qe$ et $e \wedge f = 1$ donc $e|n$
d'ou : $n = e$
donc : $(n,q) = (e,f)$
d'ou : $p = l$
pour tout $a,b \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{a}{a \wedge b} \wedge \frac{b}{a \wedge b} = 1$$

et :

$$\frac{a}{a \wedge b}, \frac{b}{a \wedge b}, a \wedge b \in \mathbb{N}^*$$

donc l'écriture sous la forme :

$$\begin{cases} (a,b) = (pn,pq) \\ n \wedge q = 1 \\ n,q,p \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

existe pour tout $a,b \in \mathbb{N}^*$ et est unique .

Lemme 1.4.3

$$|L_N(z,\chi)|^2 = \sum_{n=1}^{N} \sum_{q=1}^{N} \frac{\chi(n)}{n^z} \frac{\overline{\chi(q)}}{q^z} = \sum_{\substack{n=1 \; q=1 \\ n \wedge q = 1}}^{N} \sum_{p=1}^{\lfloor \min(\frac{N}{n}, \frac{N}{q}) \rfloor} \frac{\chi(np)}{(np)^z} \frac{\overline{\chi(qp)}}{(qp)^z}$$

Preuve la preuve consiste à combiner les deux lemmes précédents en sommant la somme du lemme 1 avec la partition du lemme 2 :

$$\begin{cases} 1 \leq n \leq N \\ 1 \leq q \leq N \\ n,q,N \in \mathbb{N}^* \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq ap \leq N \\ 1 \leq bp \leq N \\ a \wedge b = 1 \\ a,b,p,N \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} \leq p \leq \frac{N}{a} \\ \frac{1}{b} \leq p \leq \frac{N}{b} \\ a \wedge b = 1 \\ a,b,p,N \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \max(\frac{1}{a},\frac{1}{b}) \leq p \leq \min(\frac{N}{a},\frac{N}{b}) \\ a \wedge b = 1 \\ a,b,p,N \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq p \leq \min(\frac{N}{a},\frac{N}{b}) \\ a \wedge b = 1 \\ a,b,p,N \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

d'où la somme demandé . □

Remarque Les séries présentées ne convergent absolument que pour $\Re(s) > 1$, la limite de la somme partielle ne pourra alors être prise que dans ce cas . Le reste de ce travail sera effectuer pour $\Re(s) > 1$.

1.5 Factorisation du module au carré pour $\Re(s) > 1$:

Théorème 1.5.1

$$|L(z,\chi)|^2 = \left[\sum_{p=1}^{\infty} \frac{|\chi(p)|^2}{p^{2x}}\right]\left[\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^x}\left[\delta_{l=1}(l) + \sum_{\substack{m\wedge k=1 \\ mk=l \ m\leq k}} 2\Re\left(\frac{\chi(m)}{m^{iy}}\frac{\overline{\chi(k)}}{k^{iy}}\right)\right]\right]$$

Preuve

$$
\begin{aligned}
|L(z,\chi)|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^z}\frac{\overline{\chi(q)}}{q^z} \\
&= \sum_{\substack{m=1 k=1 \\ m\wedge k=1}} \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\chi(mp)}{(mp)^z}\frac{\overline{\chi(kp)}}{(kp)^z} \\
&= \sum_{m\wedge k=1} \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\chi(p)\chi(m)}{(p)^z(m)^z}\frac{\overline{\chi(p)\chi(k)}}{(p)^z(k)^z} \\
&= \sum_{m\wedge k=1} \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\chi(p)\overline{\chi(p)}}{(p)^{2x}}\left[\frac{\chi(m)}{(m)^z}\frac{\overline{\chi(k)}}{(k)^z}\right] \\
&= \sum_{m\wedge k=1} \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{|\chi(p)|^2}{(p)^{2x}}\left[\frac{\chi(m)}{(m)^z}\frac{\overline{\chi(k)}}{(k)^z}\right] \\
&= \sum_{m\wedge k=1} \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{|\chi(p)|^2}{(p)^{2x}}\left[\frac{\chi(m)\overline{\chi(k)}}{(mk)^x \frac{m}{k}^{iy}}\right] \\
&= \left[\sum_{p=1}^{\infty}\frac{|\chi(p)|^2}{p^{2x}}\right]\left[\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^x}\sum_{\substack{m\wedge k=1 \\ mk=l}}\frac{\chi(m)\overline{\chi(k)}}{\frac{m}{k}^{iy}}\right] \\
&= \left[\sum_{p=1}^{\infty}\frac{|\chi(p)|^2}{p^{2x}}\right]\left[\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^x}\sum_{\substack{m\wedge k=1 \\ mk=l}}\frac{\chi(m)}{m^{iy}}\frac{\overline{\chi(k)}}{k^{iy}}\right] \\
&= \left[\sum_{p=1}^{\infty}\frac{|\chi(p)|^2}{p^{2x}}\right]\left[\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^x}\left[\delta_{l=1}(l)+\sum_{\substack{m\wedge k=1 \\ mk=l, m>k}}2\Re\left(\frac{\chi(m)}{m^{iy}}\frac{\overline{\chi(k)}}{k^{iy}}\right)\right]\right]
\end{aligned}
$$

Définition Le produit scalaire qui suit sera utilisé :

$$\forall x,y,w,z\in\mathbb{R}:\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} = x\cdot w + y\cdot z$$

Proposition 1.5.1 Le produit scalaire précédant peut être écrit sous les formes suivantes :

$$\forall x,y,w,z\in\mathbb{R}:\ x\cdot w+y\cdot z = \det\begin{bmatrix} x & i\cdot z \\ i\cdot y & w \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} x & -z \\ y & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix}$$

Théorème 1.5.2

$$\forall l \in \mathbb{N}^\star, \forall y \in \mathbb{R} \left[\delta_{l=1}(l) + \sum_{\substack{m\wedge k=1 \\ mk=l, m>k}} 2\Re\left(\frac{\chi(m)}{m^{iy}}\overline{\frac{\chi(k)}{k^{iy}}}\right)\right] = \prod_{p|l} 2\cdot \begin{bmatrix}\cos(y\ln(p^n)) \\ \sin(y\ln(p^n))\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\Re(\chi(p^n)) \\ \Im(\chi(p^n))\end{bmatrix}$$

Preuve posant

$$Q(l) = \left[\delta_{l=1}(l) + \sum_{\substack{m\wedge k=1 \\ mk=l, m>k}} 2\Re\left(\frac{\chi(m)}{m^{iy}}\overline{\frac{\chi(k)}{k^{iy}}}\right)\right]$$

En développant la partie réelle $\Re\left(\frac{\chi(m)}{m^{iy}}\overline{\frac{\chi(k)}{k^{iy}}}\right)$, et en prenant compte de la condition $m > k$ (dont le seul rôle est d'éliminer la répétition) , on peut factoriser la fonction Q :

$$\begin{aligned}
\forall p \in \mathbb{P}, \forall n \in \mathbb{N}^\star \; Q(lp^n) &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{\substack{m\wedge k=1 \\ mk=l}} \frac{\chi(mp^n)}{mp^{niy}}\overline{\frac{\chi(k)}{k^{iy}}} + \frac{\chi(k)}{k^{iy}}\overline{\frac{\chi(mp^n)}{mp^{niy}}} + \frac{\chi(kp^n)}{kp^{niy}}\overline{\frac{\chi(m)}{m^{iy}}} + \frac{\chi(m)}{m^{iy}}\overline{\frac{\chi(kp^n)}{kp^{niy}}} \\
&= \frac{1}{2} \cdot [\sum_{\substack{m\wedge k=1 \\ mk=l}} \frac{\chi(mp^n)}{mp^{niy}}\overline{\frac{\chi(k)}{k^{iy}}} + \sum_{\substack{m\wedge k=1 \\ mk=l}} \frac{\chi(k)}{k^{iy}}\overline{\frac{\chi(mp^n)}{mp^{niy}}} + \\
&\sum_{\substack{m\wedge k=1 \\ mk=l}} \frac{\chi(kp^n)}{kp^{niy}}\overline{\frac{\chi(m)}{m^{iy}}} + \sum_{\substack{m\wedge k=1 \\ mk=l}} \frac{\chi(m)}{m^{iy}}\overline{\frac{\chi(kp^n)}{kp^{niy}}}] \\
&= \frac{1}{2} \cdot [2 \cdot \sum_{\substack{m\wedge k=1 \\ mk=l}} \frac{\chi(mp^n)}{mp^{niy}}\overline{\frac{\chi(k)}{k^{iy}}} + 2 \cdot \sum_{\substack{m\wedge k=1 \\ mk=l}} \frac{\chi(k)}{k^{iy}}\overline{\frac{\chi(mp^n)}{mp^{niy}}}] \\
&= \sum_{\substack{m\wedge k=1 \\ mk=l}} \frac{\chi(mp^n)}{mp^{niy}}\overline{\frac{\chi(k)}{k^{iy}}} + \frac{\chi(k)}{k^{iy}}\overline{\frac{\chi(mp^n)}{mp^{niy}}} \\
&= \sum_{\substack{m\wedge k=1 \\ mk=l}} \frac{\chi(p^n)}{p^{niy}}\frac{\chi(m)}{m^{iy}}\overline{\frac{\chi(k)}{k^{iy}}} + \frac{\chi(k)}{k^{iy}}\overline{\frac{\chi(m)}{m^{iy}}\frac{\chi(p^n)}{p^{niy}}} \\
&= \left[\sum_{\substack{m\wedge k=1 \\ mk=l}} \frac{\chi(k)}{k^{iy}}\overline{\frac{\chi(m)}{m^{iy}}}\right]\left[\frac{\chi(p^n)}{p^{niy}} + \overline{\frac{\chi(p^n)}{p^{niy}}}\right] \\
&= \left[\sum_{\substack{m\wedge k=1 \\ mk=l}} \frac{\chi(k)}{k^{iy}}\overline{\frac{\chi(m)}{m^{iy}}}\right]\left[2\cdot\Re(\frac{\chi(p^n)}{p^{niy}})\right] \\
&= \left[\sum_{\substack{m\wedge k=1 \\ mk=l}} \frac{\chi(k)}{k^{iy}}\overline{\frac{\chi(m)}{m^{iy}}}\right]\left[2\cdot \begin{bmatrix}\cos(y\ln(p^n)) \\ \sin(y\ln(p^n))\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\Re(\chi(p^n)) \\ \Im(\chi(p^n))\end{bmatrix}\right]
\end{aligned}$$

Par récurrence sur chaque puissance de nombre premier dans la décomposition de n en produit de nombre premier :

$$Q(n) = \prod_{p|n} 2 \cdot \begin{bmatrix} \cos(y \ln(p^{v_p(n)})) \\ \sin(y \ln(p^{v_p(n)})) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Re(\chi(p^{v_p(n)})) \\ \Im(\chi(p^{v_p(n)})) \end{bmatrix}$$

Remarque Cette formulation de Q prouve qu'elle est une fonction multiplicative .

Proposition 1.5.2 Il est peut être intéressant de voir qu'on peut écrire la fonction Q des manières suivantes :

$$\begin{aligned}
Q(n) &= \prod_{p|n} 2 \cdot [\cos(y \ln(p^{v_p(n)})) \cdot \Re(\chi(p^{v_p(n)})) + \sin(y \ln(p^{v_p(n)})) \cdot \Im(\chi(p^{v_p(n)}))] \\
&= \prod_{p|n} 2 \cdot \det \begin{bmatrix} \cos(y \ln(p^{v_p(n)})) & -\Im(\chi(p^{v_p(n)})) \\ \sin(y \ln(p^{v_p(n)})) & \Re(\chi(p^{v_p(n)})) \end{bmatrix} \\
&= \prod_{p|n} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \cdot \cos(y \ln(p^{v_p(n)})) \\ \sqrt{2} \cdot \sin(y \ln(p^{v_p(n)})) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2} \cdot \Re(\chi(p^{v_p(n)})) \\ \sqrt{2} \cdot \Im(\chi(p^{v_p(n)})) \end{bmatrix} \\
&= \prod_{p|n} 2 \cdot \det \begin{bmatrix} \cos(y \ln(p^{v_p(n)})) & i \cdot \Im(\chi(p^{v_p(n)})) \\ i \cdot \sin(y \ln(p^{v_p(n)})) & \Re(\chi(p^{v_p(n)})) \end{bmatrix} \\
&= \prod_{p|n} \det \begin{bmatrix} \sqrt{2} \cdot \cos(y \ln(p^{v_p(n)})) & i \cdot \sqrt{2} \cdot \Im(\chi(p^{v_p(n)})) \\ i \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(y \ln(p^{v_p(n)})) & \sqrt{2} \cdot \Re(\chi(p^{v_p(n)})) \end{bmatrix} \\
&= \det \left[\prod_{p|n} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \cdot \cos(y \ln(p^{v_p(n)})) & i \cdot \sqrt{2} \cdot \Im(\chi(p^{v_p(n)})) \\ i \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(y \ln(p^{v_p(n)})) & \sqrt{2} \cdot \Re(\chi(p^{v_p(n)})) \end{bmatrix} \right]
\end{aligned}$$

Remarque L'ensemble des matrices :

$$\begin{bmatrix} c & ib \\ is & a \end{bmatrix} \quad a, b, c, s \in \mathbb{R}$$

est stable par multiplication , son déterminant est réel. Son déterminant se calcule à l'aide des valeurs propres comme suit :

$$\det \begin{bmatrix} c & ib \\ is & a \end{bmatrix} = \frac{c + d + \sqrt{(c+d)^2 - 4 \cdot (ca + sb)}}{2} \cdot \frac{c + d - \sqrt{(c+d)^2 - 4 \cdot (ca + sb)}}{2}$$

Ceci ne sera pas utilisé plus tard , il est mentionné simplement comme remarque.

Théorème 1.5.3

$$|L(z,\chi)|^2 = \left[\sum_{p=1}^{\infty} \frac{|\chi(p)|^2}{p^{2x}}\right] \prod_{q\in\mathbb{P}} \left[1+\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{q^{mx}} \cdot 2 \cdot \begin{bmatrix}\cos(y\ln(q^m))\\ \sin(y\ln(q^m))\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\Re(\chi(q^m))\\ \Im(\chi(q^m))\end{bmatrix}\right]$$

Preuve

$\forall q \in \mathbb{P}$:

$$\begin{aligned}
|L(z,\chi)|^2 &= \left[\sum_{p=1}^{\infty} \frac{|\chi(p)|^2}{p^{2x}}\right] \left[\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^x} \cdot \prod_{p|l} 2 \cdot \begin{bmatrix}\cos(y\ln(p^{v_p(l)}))\\ \sin(y\ln(p^{v_p(l)}))\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\Re(\chi(p^{v_p(l)}))\\ \Im(\chi(p^{v_p(l)}))\end{bmatrix}\right] \\
&= \left[\sum_{p=1}^{\infty} \frac{|\chi(p)|^2}{p^{2x}}\right] \left[\sum_{l=1,q\nmid l}^{\infty} \frac{1}{l^x} \left[\prod_{p|l} 2 \cdot \begin{bmatrix}\cos(y\ln(p^{v_p(l)}))\\ \sin(y\ln(p^{v_p(l)}))\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\Re(\chi(p^{v_p(l)}))\\ \Im(\chi(p^{v_p(l)}))\end{bmatrix}\right] + \right. \\
&\left. \sum_{l=1,q\nmid l}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{l^x} \frac{1}{q^{mx}} \cdot \prod_{p|l} 2 \cdot \begin{bmatrix}\cos(y\ln(p^{v_p(l)}))\\ \sin(y\ln(p^{v_p(l)}))\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\Re(\chi(p^{v_p(l)}))\\ \Im(\chi(p^{v_p(l)}))\end{bmatrix} \left[2 \cdot \begin{bmatrix}\cos(y\ln(q^m))\\ \sin(y\ln(q^m))\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\Re(\chi(q^m))\\ \Im(\chi(q^m))\end{bmatrix}\right]\right] \\
&= \left[\sum_{p=1}^{\infty} \frac{|\chi(p)|^2}{p^{2x}}\right] \left[\sum_{l=1,p\nmid l}^{\infty} \frac{1}{l^x} \left[\prod_{p|l} 2 \cdot \begin{bmatrix}\cos(y\ln(p^{v_p(l)}))\\ \sin(y\ln(p^{v_p(l)}))\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\Re(\chi(p^{v_p(l)}))\\ \Im(\chi(p^{v_p(l)}))\end{bmatrix}\right]\right] \\
&\left[1+\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{q^{mx}} \cdot 2 \cdot \begin{bmatrix}\cos(y\ln(q^m))\\ \sin(y\ln(q^m))\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\Re(\chi(q^m))\\ \Im(\chi(q^m))\end{bmatrix}\right]
\end{aligned}$$

Par récurrence sur les nombres premier , on obtient la factorisation suivante :

$$|L(z,\chi)|^2 = \left[\sum_{p=1}^{\infty} \frac{|\chi(p)|^2}{p^{2x}}\right] \prod_{q\in\mathbb{P}} \left[1+\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{q^{mx}} \cdot 2 \cdot \begin{bmatrix}\cos(y\ln(q^m))\\ \sin(y\ln(q^m))\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\Re(\chi(q^m))\\ \Im(\chi(q^m))\end{bmatrix}\right]$$

Ce produit correspond (après vérification dans le cas de zeta) au produit d'Euler pour $|L(z,\chi)|^2$.

1.6 Preuve dans le cas de $|\zeta|^2$:

Remarque La formule ci dessous n'est qu'un cas particulier de la factorisation du module des séries L qui la précède , néanmoins , j'ai choisi de laisser cette preuve que j'avais trouvé avant de généraliser car c'est une version moins abstraite .

Théorème 1.6.1

$$|\zeta(z)|^2 = \zeta(2x) \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^x} 2^{\omega(m)} \prod_{j=1}^{\omega(m)} \cos(y \ln(p_j^{v_{p_j}(m)}))$$

Preuve La somme sur les factorisations possibles de m en nombre premier entre eux peut s'écrire plus simplement , si on écrit la décomposition de m en nombre premier :

$$m = \prod_{i=1}^{\omega(m)} p_i^{v_{p_i}(m)}$$

$$\mathrm{rad}(m) = \prod_{i=1}^{\omega(m)} p_i$$

prendre n et q premier entre eux et de produit égal à m revient à choisir un diviseur du radical de m .

$\omega(m)$: est le nombre de nombre premiers distincts dans la décomposition de m

le nombre de diviseur du radical de m est : $2^{\omega(m)}$

d'ou :

$$\sum_{\substack{nq=m \\ n \wedge q=1}} \cos(y \ln(\frac{n}{q}))) = \sum_{i=1}^{2^{\omega(m)}} \cos(\sum_{\varepsilon \in S} \varepsilon_j y \ln(p_j)))$$

avec $S = \{1, -1\}^{\omega(m)}$

en utilisant la formule trigonométrique suivante :

$$\prod_{k=1}^{n} \cos \theta_k = \frac{1}{2^n} \sum_{e \in S} \cos(e_1 \theta_1 + \cdots + e_n \theta_n)$$

$$\text{avec } S = \{1, -1\}^n$$

on obtient :

$$\sum_{i=1}^{2^{\omega(m)}} \cos(\sum_{\varepsilon \in S} \varepsilon_j y \ln(p_j))) = 2^{\omega(m)} \prod_{j=1}^{\omega(m)} \cos(y \ln(p_j^{v_{p_j}(m)}))$$

avec $S = \{1, -1\}^{\omega(m)}$
ce qui permet de réécrire la formule d'avant :

$$|\zeta(z)|^2 = \zeta(2x) \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^x} 2^{\omega(m)} \prod_{j=1}^{\omega(m)} \cos(y \ln(p_j^{v_{p_j}(m)}))$$

Remarque Cette formule permet de déduire un résultat connu de Hardy dans le cas ou $y = 0$ [23] :

$$\zeta(x)^2 = \zeta(2x) \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2^{\omega(m)}}{m^x}$$

1.7 Cas de $\frac{1}{2} < \Re(s) < 1$:

Un Calcul similaire peut être fait en utilisant la formule suivante :

$$\forall s \in \mathbb{C} - 1, \Re(s) > 0 \ : \ \zeta(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

Avec $\frac{1}{2} < \Re(s) < 1$ (entre 0 et $\frac{1}{2}$ c'est encore plus problématique) .
Néanmoins , cela ne marche pas notamment car on a pas la convergence absolue . Ce qui complexifie (voir peut être rend impossible) certaines manipulations sur les séries.

Remarque les séries factorisées dans ce chapitre continuent souvent à donner la bonne limite numériquement au sens de Cesàro pour $\frac{1}{2} < \Re(s) < 1$, même quand elles ne sont pas convergentes . des séries similaires apparaissent dans [7]
Trouver des séries convergentes (sens commun de convergence) à partir de ces séries convergentes au sens de Cesàro est une des motivations derrière la recherche qui est faite dans le chapitre 2.
Une des pistes explorées sans sucés est de trouver une permutation de la série qui converge vers la limite de Césaro , une autre piste était de construire des mesures dépendantes de l'ordre de sommation des séries .

Remarque L'hypothèse de Riemann découle de la preuve que la fonction zêta ne s'annule pas dans la région $\frac{1}{2} < \Re(s) < 1$ grâce à l'équation fonctionnelle qui implique que l'ensemble des zéros non triviaux est symétrique selon la droite $\Re(s) = \frac{1}{2}$.

L'idée est alors que le produit d'Euler et l'équation fonctionnelle se complètent en montrant respectivement l'absence de zéro dans $\frac{1}{2} < \Re(s) < 1$ puis dans $0 < \Re(s) < \frac{1}{2}$. le défi est de généraliser le produit d'euler dans la moitié droite de la bande critique .

Remarque Une voie possible serais de s'intéresser au permutations qui rendent la série convergente vers la limite de Césaro.

Chapitre 2

Construction de l'anneau $(\mathbb{M}, \square, \times)$:

2.1 Démarche :

Sur ce chapitre , le but est de construire un certain anneau de fonction ainsi que de prouver son unicité dans un certain sens . Les opérations utilisées dans l'anneau final ont été étudiées dans plusieurs articles dont [15] , [16] , [17] , [18] .
On va alors commencer par quelques définitions , puis on va chercher les conditions imposées par la définition d'anneau commutatif sur une fonction poids associer à une l'opération somme de l'anneau recherché .

2.2 Définition :

Définition On définit l'ensemble des fonctions multiplicatives comme suivant :

$$F \in \mathbb{M} \iff \begin{array}{l} F : \mathbb{N}^\star \longrightarrow \mathbb{C} \\ F(1) = 1 \\ a \wedge b = 1 \Rightarrow F(ab) = F(a)F(b) \end{array}$$

Définition On introduit les fonctions poids W comme suivantes :

$$W : \mathbb{N}^{\star 2} \longrightarrow \mathbb{C}$$

Définition On défini l'opération $\underset{w}{\square}$, qu'on appellera pour l'instant W-convolution :

$$\forall F, G \in \mathbb{M}, \forall m \in \mathbb{N}^\star : [F \underset{w}{\square} G](m) = \sum_{ab=m} F(a)G(b)W(a,b)$$

Remarque pour alléger la notation , on notera cette opération simplement $\Box$.

Définition On définit l'opération (multiplication) $\times$ comme suivant :

$$\forall F, G \in \mathbb{M}, \forall m \in \mathbb{N}^\star : [F \times G](m) = F(m)G(m)$$

Définition On définit les fonctions multiplicatives indicatrices comme suit :

$$\forall S \subset \mathbb{P} \times \mathbb{N}^\star : \mathbb{1}_S(p^n) = \begin{cases} 1 & \text{si } (p,n) \in S \cup \{1,1\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

on écrira aussi $\mathbb{1}_s$ pour $s \in \mathbb{N}$, qu'on définit comme suit :

$$\mathbb{1}_s = \mathbb{1}_S \iff s = \prod_{(p,n) \in S} p^n$$

2.3 Construction de l'anneau $(\mathbb{M}, \Box, \times)$:

Lemme 2.3.1 L'opération $\Box$ est commutative si et seulement si la fonction $W(.,.)$ est commutative :

$$\forall F, G \in \mathbb{M}, \forall m \in \mathbb{N}^\star : F \Box G(m) = G \Box F(m) \iff \forall a, b \in \mathbb{N}^\star : W(a,b) = W(b,a)$$

Preuve Commençons par l'implication direct $\Longrightarrow$:

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_a \Box \mathbb{1}_b(ab) &= \sum_{nq=ab} \mathbb{1}_a(n) \mathbb{1}_b(q) W(n,q) \\ &= \mathbb{1}_a(a) \mathbb{1}_b(b) W(a,b) \\ &= W(a,b) \end{aligned}$$

Et dans l'autre sens :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_b \Box \mathbb{1}_a(ab) &= \sum_{nq=ab} \mathbb{1}_b(n) \mathbb{1}_a(q) W(n,q) \\ &= \mathbb{1}_b(b) \mathbb{1}_a(a) W(b,a) \\ &= W(b,a) \end{aligned}$$

D'où le premier sens .
établissons maintenant la réciproque $\Longleftarrow$, on suppose :

$$\forall a,b \in \mathbb{N}^{\star} : W(a,b) = W(b,a)$$

On a , $\forall F,G \in \mathbb{M}$,$\forall m \in \mathbb{N}^{\star}$:

$$\begin{aligned}
F \,\Box\, G(m) &= \sum_{nq=m} F(n)G(q)W(n,q) \\
&= \sum_{\substack{nq=m \\ n>q}} F(n)G(q)W(n,q) + \sum_{\substack{nq=m \\ n<q}} F(n)G(q)W(n,q) + \sum_{\substack{nq=m \\ n=q}} F(n)G(q)W(n,q) \\
&= \sum_{\substack{qn=m \\ q>n}} G(q)F(n)W(q,n) + \sum_{\substack{qn=m \\ q<n}} G(q)F(n)W(q,n) + \sum_{\substack{qn=m \\ q=n}} G(q)F(n)W(q,n) \\
&= \sum_{nq=m} G(n)F(q)W(n,q) \\
&= G \,\Box\, F(m)
\end{aligned}$$

D'où la réciproque .
ce qui finit la preuve .

Lemme 2.3.2 $(\mathbb{M},\Box)$ est stable si et seulement si la fonction W est multiplication à deux variables selon le sens suivant :

$$\forall F,G \in \mathbb{M} : F \,\Box\, G \in \mathbb{M} \iff \forall a,b,c,d \in \mathbb{N}^{\star}, ab \wedge cd = 1 : W(a,b)W(c,d) = W(ac,bd)$$

Preuve Commençons par l'implication direct $\Longrightarrow$:
$\forall a_1,a_2,b_1,b_2 \in \mathbb{N}^{\star}$ posant : $a_1a_2 = a$ et $b_1b_2 = b$.
Supposons $a \wedge b = 1$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{a_1b_1} \,\Box\, \mathbb{1}_{a_2b_2}(ab) &= \sum_{nq=ab} \mathbb{1}_a(n)\mathbb{1}_b(q)W(n,q) \\
&= \mathbb{1}_a(a_1a_2)\mathbb{1}_b(b_1b_2)W(a_1a_2,b_1b_2) \\
&= W(a_1a_2,b_1b_2)
\end{aligned}$$

Vu que $\mathbb{1}_{a_1b_1} \square \mathbb{1}_{a_2b_2}$ est une fonction multiplicative :

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{a_1b_1} \square \mathbb{1}_{a_2b_2}(ab) &= [\mathbb{1}_{a_1b_1} \square \mathbb{1}_{a_2b_2}](a) \times [\mathbb{1}_{a_1b_1} \square \mathbb{1}_{a_2b_2}](b) \\
&= [\sum_{nq=a} \mathbb{1}_{a_1b_1}(n)\mathbb{1}_{a_2b_2}(q)W(n,q)] \times [\sum_{nq=b} \mathbb{1}_{a_1b_1}(n)\mathbb{1}_{a_2b_2}(q)W(n,q)] \\
&= [\mathbb{1}_{a_1b_1}(a_1)\mathbb{1}_{a_2b_2}(a_2)W(a_1,a_2)] \times [\mathbb{1}_{a_1b_1}(b_1)\mathbb{1}_{a_2b_2}(b_2)W(b_1,b_2)] \\
&= W(a_1,a_2)W(b_1,b_2)
\end{aligned}$$

D'où le premier sens :

$$W(a_1a_2, b_1b_2) = W(a_1,a_2)W(b_1,b_2)$$

établissons maintenant la réciproque $\Longleftarrow$:
On suppose :

$$\forall a,b,c,d \in \mathbb{N}^{\star}, ab \wedge cd = 1 : W(a,b)W(c,d) = W(ac,bd)$$

On a :

$$\begin{aligned}
\forall F,G \in \mathbb{M}, \forall a,b \in \mathbb{N}^{\star},\ a \wedge b = 1 :\ [F \square G](ab) &= \sum_{nq=ab} F(n)G(q)W(n,q) \\
&= \sum_{nq=a_1a_2b_1b_2} F(n)G(q)W(n,q)
\end{aligned}$$

Et dans l'autre sens :

$$\begin{aligned}
[F \square G](a) \times [F \square G](b) &= [\sum_{n_1n_2=a} F(n_1)G(n_2)W(n_1,n_2)] \times [\sum_{q_1q_2=b} F(q_1)G(q_2)W(q_1,q_2)] \\
&= \sum_{n_1n_2=a} F(n_1)G(n_2)W(n_1,n_2) \sum_{q_1q_2=b} F(q_1)G(q_2)W(q_1,q_2) \\
&= \sum_{n_1n_2=a} \sum_{q_1q_2=b} F(n_1)G(n_2)W(n_1,n_2)F(q_1)G(q_2)W(q_1,q_2) \\
&= \sum_{n_1n_2=a} \sum_{q_1q_2=b} F(n_1q_1)G(n_2q_2)W(n_1q_1,n_2q_2)
\end{aligned}$$

il reste donc à prouver :

$$\sum_{nq=a_1a_2b_1b_2} F(n)G(q)W(n,q) = \sum_{n_1n_2=a} \sum_{q_1q_2=b} F(n_1q_1)G(n_2q_2)W(n_1q_1,n_2q_2)$$

cela revient à prouver , sachant que $a_1a_2 = a$, $b_1b_2 = b$ et $a \wedge b = 1$ que le changement de variable précédent est bijectif .
étant donné $n_1, n_2, q_1, q_2 \in \mathbb{N}^\star$ qui vérifie $n_1n_2 = a$ et $q_1q_2 = b$.

Posons $n = n_1q_1$ et $q = n_2q_2$, on a l'égalité suivante :

$$F(n_1q_1)G(n_2q_2)W(n_1q_1, n_2q_2) = F(n)G(q)W(n,q)$$

où nq=ab .
inversement , étant donné $n, q \in \mathbb{N}^\star$ qui vérifie : nq=ab.
on a l'égalité suivante :

$$F(n)G(q)W(n,q) = F([n \wedge a].[n \wedge b])G([q \wedge a].[q \wedge b])W([n \wedge a].[n \wedge b], [q \wedge a].[q \wedge b])$$

où $[n \wedge a].[q \wedge a] = a$ et $[n \wedge b].[q \wedge b] = b$.
ce qui établit l'égalité , d'où la réciproque du théorème .

Lemme 2.3.3 en supposant la stabilité et la commutativité de la structure $(\mathbb{M}, \square)$, l'élément neutre est la fonction $\delta_1 = \mathbb{1}_\varnothing$:

$$\exists E \in \mathbb{M} \forall F \in \mathbb{M} : F \square E = E \square F = F \iff \forall (n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{P}, W(1,p^n) = 1, E = \delta_1$$

Preuve
par commutativité , on a :

$$\exists E \in \mathbb{M} \forall F \in \mathbb{M} : F \square E = E \square F = F \iff \exists E \in \mathbb{M} \forall F \in \mathbb{M} : F \square E = F$$

par stabilité , on se restreint à :

$$\exists E \in \mathbb{M} \forall F \in \mathbb{M} : F \square E = F \iff \forall F \in \mathbb{M}, \forall (n,p) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{P}, : [F \square E](p^n) = F(p^n)$$

on calcule alors la W-convolution suivante : $\forall (n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{P}$:

$$\begin{aligned} [F \square E](p^n) &= \sum_{nq=p^n} F(n)E(q)W(n,q) \\ &= \sum_{l=0}^{l=n} F(p^l)E(p^{n-l})W(p^l, p^{n-l}) \end{aligned}$$

fixons $p \in \mathbb{P}$ prouvons le sens directe par récurrence (forte) :

$$\forall F \in \mathbb{M}, \forall n \in \mathbb{N}, : [F \Box E](p^n) = F(p^n) \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^\star, W(1,p^n) = 1 \text{ et } E = \delta_1$$

cas initial : $n = 0$

$$[F \Box E](1) = W(1,1)$$

d'où

$$W(1,1) = 1 \text{ et } E(1) = 1$$

l'hypothèse de récurrence :

$$\forall F \in \mathbb{M}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, : [F \Box E](p^{n_0}) = F(p^{n_0}) \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^\star, W(1,p^{n_0}) = 1 \text{ et } E = \delta_1$$

cas n+1 :

$$\begin{aligned} [F \Box E](p^{n+1}) &= \sum_{l=0}^{l=n+1} F(p^l)E(p^{n+1-l})W(p^l,p^{n+1-l}) \\ &= F(p^{n+1})E(1)W(p^{n+1},1) + F(1)E(p^{n+1})W(1,p^{n+1}) \\ &= W(p^{n+1},1)(F(p^{n+1}) + E(p^{n+1})) \end{aligned}$$

donc :

$$W(p^{n+1},1)(F(p^{n+1})+E(p^{n+1}))-F(p^{n+1}) = F(p^{n+1})(W(p^{n+1},1)-1)+E(p^{n+1})W(p^{n+1},1)$$

comme ni l'élément neutre E , ni la fonction poids W ne dépend de F , cette expression peut être vue comme un polynôme en $F(p^{n+1})$.
Posons $A = W(p^{n+1},1) - 1$ $B = E(p^{n+1})W(p^{n+1},1)$, on a alors :

$$A.F(p^{n+1}) + B = 0 \iff A = 0 \,\text{et}\, B = 0$$

donc :

$$W(p^{n+1},1) = 1 \text{ } et \text{ } E(p^{n+1}) = 0$$

d'où le sens direct.
Réciproquement :

$$
\begin{aligned}
[F \square \delta_1](p^n) &= \sum_{l=0}^{l=n} F(p^l)E(p^{n-l})W(p^l, p^{n-l}) \\
&= F(p^n)E(1)W(p^{n+1}, 1) \\
&= F(p^n)
\end{aligned}
$$

ce qui finit la preuve

Lemme 2.3.4 Hypothèses : $(\mathbb{M}, \square)$ est stable et commutative .
l'associative de la structure $(\mathbb{M}, \square)$ est équivalente à :

$$\forall F,G,H \in \mathbb{M} : [[F \square G] \square H] = [F \square [G \square H]] \iff \forall a,b,c \in \mathbb{N}^\star, W(a,b)W(ab,c) = W(b,c)W(bc,a)$$

Preuve le sens directe $\Longrightarrow$ se prouve facilement avec les fonctions indicatrices :

$$
\begin{aligned}
\forall a,b,c \in \mathbb{N}^\star \, \mathbb{1}_a \square [\mathbb{1}_b \square \mathbb{1}_c](abc) &= \sum_{efg=abc} \mathbb{1}_a(f)\mathbb{1}_b(g)\mathbb{1}_c(e)W(g,e)W(ge,f) \\
&= W(b,c)W(bc,a)
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\forall a,b,c \in \mathbb{N}^\star \, [\mathbb{1}_a \square \mathbb{1}_b] \square \mathbb{1}_c(abc) &= \sum_{efg=abc} \mathbb{1}_a(f)\mathbb{1}_b(g)\mathbb{1}_c(e)W(f,g)W(fg,e) \\
&= W(a,b)W(ab,c)
\end{aligned}
$$

d'où :

$$\forall a,b,c \in \mathbb{N}^\star : W(a,b)W(ab,c) = W(b,c)W(bc,a)$$

la réciproque se prouve $\Longleftarrow$:
$\forall F,G,H \in \mathbb{M}, \forall (n,p) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{P}$:

$$
\begin{aligned}
[F \square G] \square H(p^n) &= \sum_{ab=p^n} [F \square G](a)H(b)W(a,b) \\
&= \sum_{ab=p^n} \sum_{cd=a} F(c)G(d)W(c,d)H(b)W(cd,b) \\
&= \sum_{bcd=p^n} F(c)G(d)H(b)W(c,d)W(cd,b)
\end{aligned}
$$

et :

$$\begin{aligned}
F \,\Box\, [G \,\Box\, H](p^n) &= \sum_{ba=p^n} F(b)[G \,\Box\, H](a)W(b,a) \\
&= \sum_{ba=p^n} F(b) \sum_{cd=a} G(c)H(d)W(c,d)W(b,a) \\
&= \sum_{bcd=p^n} F(b)G(c)H(d)W(c,d)W(b,cd) \\
&= \sum_{bcd=p^n} F(c)G(d)H(b)W(d,b)W(c,db) \\
&= \sum_{bcd=p^n} F(c)G(d)H(b)W(d,b)W(db,c)
\end{aligned}$$

or on a :

$$\forall a,b,c \in \mathbb{N}^\star : W(a,b)W(ab,c) = W(b,c)W(bc,a)$$

d'où :

$$\sum_{bcd=p^n} F(c)G(d)H(b)W(c,d)W(cd,b) = \sum_{bcd=p^n} F(c)G(d)H(b)W(d,b)W(db,c)$$

d'ou le sens direct .

Lemme 2.3.5 notons : $\mathbb{1} := \mathbb{1}_{\mathbb{N}\times\mathbb{P}}$.
$(\mathbb{M}, \times)$ est stable , commutatif , associatif et admet $\mathbb{1}$ comme élément neutre .

Preuve Stabilité :

$$\forall F,G \in \mathbb{M}, \forall a,b \in \mathbb{N}^{\star 2} : [F \times G](ab) = F(ab) \times G(ab) = F(a)G(a)F(b)G(b) = [F \times G](a) \times [F \times G](b)$$

d'où :

$$\forall F,G \in \mathbb{M} : F \times G \in \mathbb{M}$$

Commutativité :

$$\forall F,G \in \mathbb{M}, \forall m \in \mathbb{N}^\star : [F \times G](m) = F(m) \times G(m) = G(m) \times F(m) = [G \times F](m)$$

d'où :

$$\forall F,G \in \mathbb{M} : F \times G = G \times F$$

Associativité :

$$\forall F,G,H \in \mathbb{M}, \forall m \in \mathbb{N}^\star : [[F \times G] \times H](m) = [F \times G](m) \times H(m) = F(m)G(m)H(m) = [F \times [G \times H]](m)$$

d'où :

$$\forall F,G,H \in \mathbb{M} : [[F \times G] \times H = [F \times [G \times H]]$$

$\mathbb{1}$ est l'élément neutre :

$$\forall F \in \mathbb{M}, \forall (n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{P} : [F \times \mathbb{1}](p^n) = F(p^n) \times \mathbb{1}(p^n) = F(p^n)$$

d'où , par unicité de l'élément neutre , $\mathbb{1}$ est l'élément neutre de $(\mathbb{M}, \times)$.
ce qui prouve le théorème.

Lemme 2.3.6 Hypothèse :

$$\forall a,b,c,d \in \mathbb{N}^\star, ab \wedge cd = 1 : W(a,b)W(c,d) = W(ac,bd)$$

Qui peut être généralisé en :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{N}^\star, \forall b_0, b_1, ..., b_n \in \mathbb{N}^\star \,|\, \forall i,j \in [\![0,n]\!], a_ib_i \wedge a_jb_j = 1$$
$$\prod_{i=0}^{i=n} W(a_i,b_i) = W(\prod_{i=0}^{i=n} a_i, \prod_{i=0}^{i=n} b_i)$$

Preuve On va procéder par récurrence :
Cas $n = 0$:

$$\prod_{i=0}^{i=0} W(a_i,b_i) = W(\prod_{i=0}^{i=0} a_i, \prod_{i=0}^{i=0} b_i) \iff 1 = W(1,1)$$

hypothèse de récurrence :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall a_0, a_1, ..., a_{n_0} \in \mathbb{N}^\star, \forall b_0, b_1, ..., b_{n_0} \in \mathbb{N}^\star \,|\, \forall i,j \in [\![0,n_0]\!], a_ib_i \wedge a_jb_j = 1$$
$$\prod_{i=0}^{i=n_0} W(a_i,b_i) = W(\prod_{i=0}^{i=n_0} a_i, \prod_{i=0}^{i=n_0} b_i)$$

Le cas $n+1$:

$$\begin{aligned}\prod_{i=0}^{i=n+1} W(a_i,b_i) &= [\prod_{i=0}^{i=n} W(a_i,b_i)]W(a_{n+1},b_{n+1}) \\ &= W(\prod_{i=0}^{i=n} a_i, \prod_{i=0}^{i=n} b_i)W(a_{n+1},b_{n+1}) && \text{[hypothèse récurrence]} \\ &= W(\prod_{i=0}^{i=n+1} a_i, \prod_{i=0}^{i=n+1} b_i) && [a_{n+1}b_{n+1} \wedge \prod_{i=0}^{i=n} a_i \prod_{i=0}^{i=n} b_i = 1]\end{aligned}$$

D'où le résultat recherché.

Lemme 2.3.7 Hypothèse : $(\mathbb{M},\square)$ est stable , commutatif et il admet un élément neutre. La fonction W peut s'écrire comme tel :

$$\begin{aligned}\forall n,q \in \mathbb{N}^\star : W(n,q) &= \prod_{\substack{p \mid \frac{nq}{(n\wedge q)^2} \\ p\in\mathbb{P}}} W(p^{v_p(\frac{nq}{(n\wedge q)^2})},1) \prod_{\substack{p\mid n\wedge q \\ p\in\mathbb{P}}} W(p^{v_p(n\wedge q)},p^{v_p(n\wedge q)}) \\ &= \prod_{\substack{p\mid n\wedge q \\ p\in\mathbb{P}}} W(p^{v_p(n\wedge q)},p^{v_p(n\wedge q)})\end{aligned}$$

Remarque Cela signifie que dans ce cas , la fonction W est entièrement déterminée par l'image des couples égaux de puissance de nombre premier.

Preuve la fonction W vérifie , par hypothèse , la propriété suivante :

$$\forall a,b,c,d \in \mathbb{N}^\star, ab \wedge cd = 1 : W(a,b)W(c,d) = W(ac,bd)$$

On a $\frac{nq}{(n\wedge q)^2} \wedge (n\wedge q)^2 = 1$ d'où :

$$\forall n,q \in \mathbb{N}^\star : W(n,q) = W(\frac{n}{n\wedge q},\frac{q}{n\wedge q})W(n\wedge q, n\wedge q)$$

Calculons la première partie :

$$\forall n,q \in \mathbb{N}^\star : W(\frac{n}{n\wedge q},\frac{q}{n\wedge q}) = W(\frac{n}{n\wedge q},1)W(1,\frac{q}{n\wedge q})$$
$$= W(\frac{nq}{(n\wedge q)^2},1) \qquad \frac{n}{n\wedge q}\times 1 \wedge \frac{q}{n\wedge q}\times 1 = 1$$
$$= \prod_{\substack{p|\frac{nq}{(n\wedge q)^2}\\ p\in\mathbb{P}}} W(p^{v_p(\frac{nq}{(n\wedge q)^2})},1)$$

Calculons ensuite la seconde partie :

$$\forall n,q \in \mathbb{N}^\star : W(n\wedge q,n\wedge q) = \prod_{\substack{p|n\wedge q\\ p\in\mathbb{P}}} W(p^{v_p(n\wedge q)},p^{v_p(n\wedge q)})$$

d'où :

$$\forall n,q \in \mathbb{N}^\star : W(n,q) = \prod_{\substack{p|\frac{nq}{(n\wedge q)^2}\\ p\in\mathbb{P}}} W(p^{v_p(\frac{nq}{(n\wedge q)^2})},1)\prod_{\substack{p|n\wedge q\\ p\in\mathbb{P}}} W(p^{v_p(n\wedge q)},p^{v_p(n\wedge q)})$$

par hypothèse (existence de l'élément neutre) , on obtient que :

$$\forall n,q \in \mathbb{N}^\star : W(n,q) = \prod_{\substack{p|n\wedge q\\ p\in\mathbb{P}}} W(p^{v_p(n\wedge q)},p^{v_p(n\wedge q)})$$

Lemme 2.3.8 Hypothèses : Commutativité , stabilité , associativité des deux opérations dans la structure $(\mathbb{M},\square,\times)$.
Dans la structure $(\mathbb{M},\square,\times)$, l'opération $\square$ est distributive par rapport à $\times$ si et seulement si la fonction W , poids de la convolution , vérifie certaine condition :

$$\forall F,G,H \in \mathbb{M} : [F\square G]\times H = [F\times H]\square[G\times H] \iff \forall a,b\in\mathbb{N}^\star : W(a,b) = \begin{cases} 1 \text{ si } a\wedge b = 1 \\ 0 \text{ si non} \end{cases}$$

Preuve Commençons par le sens direct $\Longrightarrow$:

$$\begin{aligned}
&\forall l,f\in\mathbb{N}\, l+f=n,\forall(n,p)\in\mathbb{N}^{\star}\times\mathbb{P}:\\
&\qquad[\mathbb{1}_{p^l}\Box\mathbb{1}_{p^f}]\times\mathbb{1}_{p^n}(p^n)=[\mathbb{1}_{p^l}\Box\mathbb{1}_{p^f}](p^n)\times\mathbb{1}_{p^n}(p^n)\\
&\qquad=\sum_{ab=p^n}\mathbb{1}_{p^l}(a)\mathbb{1}_{p^f}(b)W(a,b)\\
&\qquad=W(p^l,p^f)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\forall l,f\in\mathbb{N}\, l+f=n,\forall(n,p)\in\mathbb{N}^{\star}\times\mathbb{P}:\\
&\qquad[\mathbb{1}_{p^l}\times\mathbb{1}_{p^n}]\Box[\mathbb{1}_{p^f}\times\mathbb{1}_{p^n}](p^n)=\sum_{ab=p^n}[\mathbb{1}_{p^l}\times\mathbb{1}_{p^n}](a)[\mathbb{1}_{p^f}\times\mathbb{1}_{p^n}](b)W(a,b)\\
&\qquad=\sum_{ab=p^n}\mathbb{1}_{p^l}(a)\mathbb{1}_{p^n}(a)\mathbb{1}_{p^f}(b)\mathbb{1}_{p^n}(b)W(a,b)\\
&\qquad=\mathbb{1}_{p^l}(p^n)\mathbb{1}_{p^n}(p^n)\mathbb{1}_{p^f}(1)\mathbb{1}_{p^n}(1)W(p^n,1)\\
&\qquad+\mathbb{1}_{p^l}(1)\mathbb{1}_{p^n}(1)\mathbb{1}_{p^f}(p^n)\mathbb{1}_{p^n}(p^n)W(1,p^n)\\
&\qquad=[\mathbb{1}_{p^l}(p^n)+\mathbb{1}_{p^f}(p^n)]W(p^n,1)
\end{aligned}$$

Cas $l.f=0$:
on a alors $l=n$ ou $f=n$:

$$[\mathbb{1}_{p^l}(p^n)+\mathbb{1}_{p^f}(p^n)]W(p^n,1)=[\mathbb{1}_{p^n}(p^n)+\mathbb{1}_{p^0}(p^n)]W(p^n,1)=1$$

Cas $l.f\neq 0$:
on a alors $l\neq 0, f\neq 0, l\neq n$ et $f\neq n$ et :

$$\begin{aligned}
[\mathbb{1}_{p^l}(p^n)+\mathbb{1}_{p^f}(p^n)]W(p^n,1)&=[0+0]W(p^n,1)\\
&=0
\end{aligned}$$

D'où , en résumant :

$$W(p^l,p^f)=\begin{cases}1 \text{ si } l.f=0\\ 0 \text{ si non}\end{cases}$$

En d'autre terme (équivalent) :

$$W(p^l,p^f)=\begin{cases}1 \text{ si } p^l\wedge p^f=1\\ 0 \text{ si non}\end{cases}$$

D'après le résultat précédent , cela détermine entièrement la fonction , or la fonction :

$$\forall a,b \in \mathbb{N}^{\star} : W(a,b) \begin{cases} 1 \text{ si } a\wedge b = 1 \\ 0 \text{ si non} \end{cases}$$

vérifie ces conditions , D'où le sens directe.
Passons maintenant au sens indirect $\Longleftarrow$:

$$\begin{aligned} \forall F,G,H \in \mathbb{M}\forall(n,p) \in \mathbb{N}^{\star}\times\mathbb{P} : [F \square G]\times H(p^n) &= [\sum_{\substack{ab=p^n \\ a\wedge b=1}} F(a)G(b)W(a,b)]H(p^n) \\ &= [F(1)G(p^n)W(1,p^n) + F(p^n)G(1)W(p^n,1)]H(p^n) \\ &= G(p^n)H(p^n) + F(p^n)H(p^n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall F,G,H \in \mathbb{M}\forall(n,p) \in \mathbb{N}^{\star}\times\mathbb{P} : [F\times H]\square[G\times H](p^n) &= \sum_{\substack{ab=p^n \\ a\wedge b=1}} F(a)H(a)G(b)H(b)W(a,b) \\ &= F(1)H(1)G(p^n)H(p^n)W(1,p^n) + F(p^n)H(p^n)G(\\ &= G(p^n)H(p^n) + F(p^n)H(p^n) \end{aligned}$$

D'où le résultat recherché.

Lemme 2.3.9 Hypothèse : Commutativité , stabilité , existence élément neutre dans la structure $(\mathbb{M},\square,\times)$ ainsi que la distributivité de $\square$ par rapport à $\times$.
Dans la structure $(\mathbb{M},\square,\times)$, pour tout élément de $\mathbb{M}$, il existe un unique inverse par rapport à la loi $\square$ définie comme tel :

$$\forall F \in \mathbb{M} : [F \square I_F] = \delta_1 \iff \forall n,p \in \mathbb{N}^{\star}\times\mathbb{P} : I_F(p^n) = -F(p^n)$$

Preuve Calculons :

$$\begin{aligned} \forall F \in \mathbb{M}\forall n,p \in \mathbb{N}^{\star}\times\mathbb{P} : [F \square I_F](p^n) &= \sum_{\substack{ab=p^n \\ a\wedge b=1}} F(a)I_F(b)W(a,b) \\ &= F(1)I_F(p^n) + F(p^n)I_F(1) \\ &= I_F(p^n) + F(p^n) \\ &= \delta_1(p^n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'où

$$\forall F\in\mathbb{M}\forall n,p\in\mathbb{N}^{\star}\times\mathbb{P}:I_F(p^n)=-F(p^n)$$

Dans le cas n=0 :

$$\begin{aligned}\forall F\in\mathbb{M}:[F\,\square\,I_F](1)&=\sum_{\substack{ab=1\\a\wedge b=1}}F(a)I_F(b)W(a,b)\\&=F(1)I_F(1)\\&=\delta_1(1)\\&=1\end{aligned}$$

D'où

$$I_F(1)=1$$

Résumons :

$$\forall F\in\mathbb{M}\forall n,p\in\mathbb{N}\times\mathbb{P}:I_F(p^n)=\begin{cases}1 \text{ si } n=0\\-F(p^n) \text{ si non}\end{cases}$$

Ce qui représente la même fonction ci-dessous :

$$\forall F\in\mathbb{M}\forall n\in\mathbb{N}^{\star}:I_F(n)=F^{-1}(n)=(-1)^{\omega(n)}F(n)$$

2.4 Résultats :

Dans cette section , on présente les principaux résultats conclus à partir des lemmes précédents :

Théorème 2.4.1 La W - convolution a une formule produit :

Pour : $\forall a,b\in\mathbb{N}^{\star}:W(a,b)=\begin{cases}1\ si\ a\wedge b=1\\0\ si\ non\end{cases}$ On a :

$$\forall F,G\in\mathbb{M}\,\forall n\in\mathbb{N}^{\star}:[F\,\square\,G](n)=\sum_{\substack{ab=n\\a\wedge b=1}}F(a)G(b)=\prod_{p|n}(F(p^{v_p(n)})+G(p^{v_p(n)}))$$

Preuve L'image des puissances de nombres premiers caractérise les fonctions multiplicatives , calculons alors ces images pour la convolution recherché :

$$\forall F,G\in\mathbb{M}\forall n,p\in\mathbb{N}^\star\times\mathbb{P}:[F\,\Box\,G](p^n)=\sum_{\substack{ab=p^n\\ a\wedge b=1}}F(a)G(b)$$
$$=\begin{cases}1 \text{ si } n=0\\ F(p^n)+G(p^n) \text{ si non}\end{cases}$$

$$\forall F,G\in\mathbb{M}\forall n,p\in\mathbb{N}^\star\times\mathbb{P}:[F\,\Box\,G](p^n)=\prod_{q|p^n}(F(q^{v_q(p^n)}))+G(q^{v_q(p^n)}))$$
$$=\begin{cases}1 \text{ si } n=0\\ F(p^n)+G(p^n) \text{ si non}\end{cases}$$

D'où le résultat recherché.

Théorème 2.4.2

$$(\mathbb{M},\Box,\times) \text{ est un anneau commutatif } \iff \forall a,b\in\mathbb{N}^\star:W(a,b)=\begin{cases}1 \text{ si } a\wedge b=1\\ 0 \text{ si non}\end{cases}$$

Preuve En combinant les lemmes précédents :

$$(\mathbb{M},\Box,\times) \text{ est un anneau commutatif} \Rightarrow \begin{cases}\forall a,b\in\mathbb{N}^\star:W(a,b)=W(b,a)\\ \forall a,b,c,d\in\mathbb{N}^\star,\ ab\wedge cd=1:W(a,b)W(c,d)=W(ac,bd)\\ \forall(n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{P},W(1,p^n)=1\\ \forall a,b,c\in\mathbb{N}^\star,\ W(a,b)W(ab,c)=W(b,c)W(bc,a)\\ \forall a,b\in\mathbb{N}^\star:W(a,b)=\begin{cases}1 \text{ si } a\wedge b=1\\ 0 \text{ si non}\end{cases}\end{cases}$$
$$\Rightarrow\left\{\forall a,b\in\mathbb{N}^\star:W(a,b)=\begin{cases}1 \text{ si } a\wedge b=1\\ 0 \text{ si non}\end{cases}\right.$$

Réciproquement (la vérification est plus simple en utilisant la formule du produit) :

$$\forall a,b \in \mathbb{N}^{\star} : W(a,b) = \begin{cases} 1 \text{ si } a \wedge b = 1 \\ 0 \text{ si non} \end{cases} \quad \Rightarrow (\mathbb{M},\square,\times) \text{ est un anneau commutatif}$$

Chapitre 3

Propositions associées à l'anneau $(\mathbb{M}, \square, \times)$:

Plusieurs résultats sont présentés dans cette sections , La majorité sont déduits des opérations de l'anneau construit précédemment .

3.1 Définition :

Remarque Dans cette section, on va utiliser l'anneau $(\mathbb{M}, \square, \times)$ avec l'opération de convolution défini par :

$$\forall a, b \in \mathbb{N}^{\star} : W(a,b) = \begin{cases} 1 \text{ si } a \wedge b = 1 \\ 0 \text{ si non} \end{cases}$$

Définition On définit l'ensemble des fonctions complètement multiplicatives comme suivant :

$$F \in \mathbb{M}_c \iff \begin{matrix} F \in \mathbb{M} \\ a, b \in \mathbb{N}^{\star} : F(ab) = F(a)F(b) \end{matrix}$$

Remarque $\mathbb{M}_c$ est stable par multiplication

3.2 Résultats :

Proposition 3.2.1 pour F et G complètement multiplicatives :

$$\forall F, G \in \mathbb{M}_c : D(F,s) \times D(G,s) = D(F \times G, 2s) \times D(F \square G, s)$$

Preuve

$$\begin{aligned}
\forall F,G\in\mathbb{M}_c : D(F,s)\times D(G,s) &= \left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{F(n)}{n^s}\right]\times\left[\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{G(q)}{q^s}\right]\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{F(n)}{n^s}\frac{G(q)}{q^s}\\
&= \sum_{\substack{m=1k=1\\ m\wedge k=1}}\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{F(mr)}{(mr)^s}\frac{G(kr)}{(kr)^s}\\
&= \sum_{r=1}^{+\infty}\frac{F(r)G(r)}{(r)^{2s}}\sum_{m\wedge k=1}\left[\frac{F(m)}{(m)^s}\frac{G(k)}{(k)^s}\right]\\
&= \sum_{r=1}^{+\infty}\frac{F(r)G(r)}{(r)^{2s}}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{\substack{m\wedge k=1\\ mk=l}}\left[\frac{F(m)}{(m)^s}\frac{G(k)}{(k)^s}\right]\\
&= \left[\sum_{r=1}^{\infty}\frac{F(r)G(r)}{r^{2s}}\right]\left[\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{\substack{m\wedge k=1\\ mk=l}}\left[\frac{F(m)}{(m)^s}\frac{G(k)}{(k)^s}\right]\right]\\
&= \left[\sum_{r=1}^{\infty}\frac{F(r)G(r)}{r^{2s}}\right]\left[\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\sum_{\substack{m\wedge k=1\\ mk=l}}F(m)G(k)}{l^s}\right]\\
&= \left[\sum_{r=1}^{\infty}\frac{F(r)G(r)}{r^{2s}}\right]\left[\sum_{l=1}^{\infty}\frac{F\,\Box\,G(l)}{l^s}\right]\\
&= D(F\times G,2s)\times D(F\,\Box\,G,s)
\end{aligned}$$

Proposition 3.2.2

$$\forall F,G\in\mathbb{M}_c :\ D(F,s)\times D(G,\overline{s}) = D(F\times G,2x)\times D\Big(\frac{F}{Id_e^{iy}}\Box\frac{G}{Id_e^{-iy}},x\Big)$$

Preuve

$$
\begin{aligned}
F,G\in\mathbb{M}_c\ \forall y\in\mathbb{C}: D(F,s)\times D(G,\bar{s}) &= \left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{F(n)}{n^s}\right]\times\left[\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{G(q)}{q^{\bar{s}}}\right]\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{F(n)}{n^s}\frac{G(q)}{q^{\bar{s}}}\\
&= \sum_{\substack{m=1k=1\\ m\wedge k=1}}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{F(mp)}{(mp)^s}\frac{G(kp)}{(kp)^{\bar{s}}}\\
&= \sum_{\substack{m=1k=1\\ m\wedge k=1}}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{F(mp)}{(mp)^{x+iy}}\frac{G(kp)}{(kp)^{x-iy}}\\
&= \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{F(p)G(p)}{(p)^{2x}}\sum_{m\wedge k=1}\left[\frac{F(m)}{(m)^{x+iy}}\frac{G(k)}{(k)^{x-iy}}\right]\\
&= \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{F(p)G(p)}{(p)^{2x}}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{\substack{m\wedge k=1\\ mk=l}}\left[\frac{F(m)}{(m)^{x+iy}}\frac{G(k)}{(k)^{x-iy}}\right]\\
&= \left[\sum_{p=1}^{\infty}\frac{F(p)G(p)}{p^{2x}}\right]\left[\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{\substack{m\wedge k=1\\ mk=l}}\left[\frac{F(m)}{(m)^{x+iy}}\frac{G(k)}{(k)^{x-iy}}\right]\right]\\
&= \left[\sum_{p=1}^{\infty}\frac{F(p)G(p)}{p^{2x}}\right]\left[\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\sum_{\substack{m\wedge k=1\\ mk=l}}\frac{F(m)}{(m)^{iy}}\frac{G(k)}{(k)^{-iy}}}{l^x}\right]\\
&= \left[\sum_{p=1}^{\infty}\frac{F(p)G(p)}{p^{2x}}\right]\left[\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\frac{F}{\mathrm{Id}_e^{iy}}\square\frac{G}{\mathrm{Id}_e^{-iy}}(l)}{l^x}\right]\\
&= D(F\times G,2x)\times D\left(\frac{F}{\mathrm{Id}_e^{iy}}\square\frac{G}{\mathrm{Id}_e^{-iy}},x\right)
\end{aligned}
$$

Proposition 3.2.3 pour F et G complètement multiplicatives :

$$\forall F,G\in\mathbb{M}\ :\ F\times G=\delta_1\Rightarrow D(F,s)\times D(G,s)=D(F\square G,s)$$

Preuve

$$\forall F,G\in\mathbb{M}\ :\ F\times G=\delta_1\Rightarrow D(F\times G,s)=1$$

d'où :

$$\forall F,G \in \mathbb{M}\ :\ D(F,s)\times D(G,s) = D(F \square G,s)\times D(F\times G,s) = D(F \square G,s)$$

Proposition 3.2.4 Soit $A \in \mathbb{P}$ et $\overline{A} \in \mathbb{P}$ sont complémentaires dans $\mathbb{P}$, soit F une fonction arithmétique complètement multiplicative :

$$\forall F \in \mathbb{M}\ :\ D(\mathbb{1}_A \times F,s)\times D(\mathbb{1}_{\overline{A}}\times F,s) = D(F,s)$$

Preuve Soit $A \in \mathbb{P}$ et $\overline{A} \in \mathbb{P}$ sont complémentaire dans $\mathbb{P}$, soit F une fonction arithmétique complètement multiplicative :

$$\begin{aligned}
D(\mathbb{1}_A \times F,s)\times D(\mathbb{1}_{\overline{A}}\times F,s) &= D([\mathbb{1}_A \times F]\times[\mathbb{1}_{\overline{A}}\times F],s)\times D([\mathbb{1}_A\times F]\square[\mathbb{1}_{\overline{A}}\times F],s)\\
&= D(\mathbb{1}_A\times F\times \mathbb{1}_{\overline{A}}\times F,s)\times D([\mathbb{1}_A\times F]\square[\mathbb{1}_{\overline{A}}\times F],s)\\
&= D(\mathbb{1}_A\times \mathbb{1}_{\overline{A}}\times F\times F,s)\times D([\mathbb{1}_A\square\mathbb{1}_{\overline{A}}]\times F,s)\\
&= D(\mathbb{1}_{\emptyset}\times F\times F,s)\times D(\mathbb{1}\times F,s)\\
&= D(F,s)
\end{aligned}$$

Remarque Cette formule reflète simplement le produit d'Euler , prenons zêta comme exemple :

$$D(\mathbb{1},s) = \zeta(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \prod_{p\in A}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}\times\prod_{p\in\overline{A}}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = D(\mathbb{1}_A\times\mathbb{1},s)\times D(\mathbb{1}_{\overline{A}}\times\mathbb{1},s)$$

Proposition 3.2.5 Identité dans $(\mathbb{M},\square,\times)$:

$$[F \square F](m) = [2^{\omega(.)}\times F](m)$$

Preuve

$$[F \square F](m) = \prod_{p|m} F(p^{\nu_p(m)}) + F(p^{\nu_p(m)}) = [2^{\omega(.)}\times F](m)$$

Proposition 3.2.6 Identité dans $(\mathbb{M},\square,\times)$:

$$Id_e\square\mathbb{1}(m) = \hat{\sigma}(m)$$

ici sigma est la somme des diviseurs premiers avec leurs complémentaires .

Preuve

$$\mathrm{Id}_e\Box\mathbb{1}(m)=\prod_{p|m}p^{\nu_p(m)}+1=\sum_{ab=m\ a\wedge b=1}a=\hat{\sigma}(m)$$

Proposition 3.2.7 Identité dans $(\mathbb{M},\Box,\times)$:

$$\phi=Id_e\times\left[\mathbb{1}\Box\frac{(-1)^{\omega}}{\mathbf{rad}}\right]$$

Preuve La réécriture de la fonction ϕ se déduit simplement de la formule suivante :

$$\phi(n)=n\times\prod_{i=1}^{\omega(n)}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$$

Proposition 3.2.8

$$\forall s\in\mathbb{C},\Re(s)>1\ :\ \left[\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p^s}\right]\times\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega(n)}{n^s}$$

Preuve

$$\begin{aligned}
\left[\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p^s}\right]\times\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\right] &= \sum_{p\in\mathbb{P}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p^s}\cdot\frac{1}{n^s}\\
&= \sum_{m=2}^{\infty}\sum_{\substack{pn=m\\ p\in\mathbb{P}\ n\in\mathbb{N}^\star}}\frac{1}{p^s}\cdot\frac{1}{n^s}\\
&= \sum_{m=2}^{\infty}\sum_{\substack{pn=m\\ p\in\mathbb{P}\ n\in\mathbb{N}^\star}}\frac{1}{m^s}\\
&= \sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m^s}\sum_{\substack{pn=m\\ p\in\mathbb{P}\ n\in\mathbb{N}^\star}}1\\
&= \sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m^s}\cdot\omega(m)\\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\omega(m)}{m^s}
\end{aligned}$$

Proposition 3.2.9

$$\forall s\in\mathbb{C},\Re(s)>1\ :\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\cdot\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p^s}\frac{1}{\omega(np)}=\zeta(s)-1$$

Preuve

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\cdot\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p^s}\frac{1}{\omega(np)} &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p^s}\cdot\frac{1}{n^s}\cdot\frac{1}{\omega(np)}\\
&= \sum_{m=2}^{\infty}\sum_{\substack{pn=m\\ p\in\mathbb{P}\ n\in\mathbb{N}^\star}}\frac{1}{np^s}\cdot\frac{1}{\omega(np)}\\
&= \sum_{m=2}^{\infty}\sum_{\substack{pn=m\\ p\in\mathbb{P}\ n\in\mathbb{N}^\star}}\frac{1}{m^s}\cdot\frac{1}{\omega(m)}\\
&= \sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m^s}\cdot\frac{1}{\omega(m)}\sum_{\substack{pn=m\\ p\in\mathbb{P}\ n\in\mathbb{N}^\star}}1\\
&= \sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m^s}\cdot\frac{1}{\omega(m)}\cdot\omega(m)\\
&= \sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m^s}\\
&= \zeta(s)-1
\end{aligned}$$

Proposition 3.2.10

$$\forall s\in\mathbb{C},\Re(s)>1\ :\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\cdot\frac{1}{\omega(n)+1}\cdot[\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p^s}+\sum_{p|n}\frac{1}{p^s}\cdot\frac{1}{\omega(n)}]=\zeta(s)-1$$

Preuve

$$\begin{aligned}
\zeta(s)-1 &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\cdot\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p^s}\frac{1}{\omega(np)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p|n}\frac{1}{p^s}\cdot\frac{1}{\omega(n)}\cdot\frac{1}{n^s}+\frac{1}{\omega(n)+1}\cdot\sum_{p\nmid n}\frac{1}{p^s}\cdot\frac{1}{n^s} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\cdot[\sum_{p|n}\frac{1}{p^s}\cdot\frac{1}{\omega(n)}+\frac{1}{\omega(n)+1}\cdot\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p^s}-\sum_{p|n}\frac{1}{p^s}\cdot\frac{1}{\omega(n)+1}] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\cdot[\frac{1}{\omega(n)+1}\cdot\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p^s}+\sum_{p|n}\frac{1}{p^s}\cdot[\frac{1}{\omega(n)}-\frac{1}{\omega(n)+1}]] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\cdot[\frac{1}{\omega(n)+1}\cdot\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p^s}+\sum_{p|n}\frac{1}{p^s}\cdot[\frac{1}{\omega(n)}\cdot\frac{1}{\omega(n)+1}]] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\cdot[\frac{1}{\omega(n)+1}\cdot\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p^s}+\frac{1}{\omega(n)+1}\cdot\sum_{p|n}\frac{1}{p^s}\cdot\frac{1}{\omega(n)}] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\cdot\frac{1}{\omega(n)+1}\cdot[\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p^s}+\sum_{p|n}\frac{1}{p^s}\cdot\frac{1}{\omega(n)}]
\end{aligned}$$

Définition Pour $y\in\mathbb{R}$:
Notons les fonctions $n\in\mathbb{N}^\star\ :\ n\to\cos(y\ln(n))$ et $n\in\mathbb{N}^\star\ :\ n\to\sin(y\ln(n))$ respectivement Cosa_y et Sina_y .

Proposition 3.2.11

$$\forall m\in\mathbb{N}^\star,\forall y\in\mathbb{R}:m^{iy}=[\mathrm{Cosa}_y\,\square\,i^{\omega()}\mathrm{Sina}_y](m)$$

Preuve

$$\begin{aligned}
\forall n\in\mathbb{N}^\star\ \forall p\in\mathbb{P},\forall y\in\mathbb{R}:p^{niy} &= \exp(iyn\ln(p)) \\
&= \cos(yn\ln(p))+i\sin(yn\ln(p)) \\
&= \cos(y\ln(p^n))+i\sin(y\ln(p^n)) \\
&= [\mathrm{Cosa}_y\,\square\,i^{\omega()}\mathrm{Sina}_y](p^{niy})
\end{aligned}$$

Proposition 3.2.12

$$\mathbb{1}=\mathrm{Cosa}_y^2\,\square\,\mathrm{Sina}_y^2$$

Preuve

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}^\star\ \forall p\in\mathbb{P},\forall y\in\mathbb{R}:\mathrm{Cosa}_y^2\ \square\ \mathrm{Sina}_y^2[p^n] &= \mathrm{Cosa}_y^2[p^n]+\mathrm{Sina}_y^2[p^n]\\ &= \cos(y\ln(p^n))^2+\sin(y\ln(p^n))^2\\ &= 1\end{aligned}$$

Proposition 3.2.13 Identité remarquable :

$$A^2\ \square\ (-1)^{\omega(.)}B^2=[A\ \square\ (-1)^{\omega(.)}B]\times[A\ \square\ B]$$

Preuve

$$\begin{aligned}\forall A,B\in\mathbb{M}\ \forall p\in\mathbb{P}\ \forall n\in\mathbb{N}^\star\left[A^2\ \square\ (-1)^{\omega(.)}B^2\right][p^n] &= A(p^n)^2-B(p^n)^2\\ &= [A(p^n)-B(p^n)]\cdot[A(p^n)+B(p^n)]\\ &= \left[[A\ \square\ (-1)^{\omega(.)}B]\times[A\ \square\ B]\right][p^n]\end{aligned}$$

Proposition 3.2.14 les fonctions Cosa_y et Sina_y vérifient plusieurs identités pour tout $y\in\mathbb{R}^\star$ fixé , des identités qui sont de simple reproduction des formules cos et sin standard dont le seul intérêt est d'être appliqué sur des produits et fractions de nombre au lieu de sommes et division :

$$\begin{gathered}\mathrm{Cosa}_y(ab)=\mathrm{Cosa}_y(a)\mathrm{Cosa}_y(b)-\mathrm{Sina}_y(a)\mathrm{Sina}_y(b)\\ \mathrm{Cosa}_y(\frac{a}{b})=\mathrm{Cosa}_y(a)\mathrm{Cosa}_y(b)+\mathrm{Sina}_y(a)\mathrm{Sina}_y(b)\\ \mathrm{Sina}_y(ab)=\mathrm{Sina}_y(a)\mathrm{Cosa}_y(b)+\mathrm{Cosa}_y(a)\mathrm{Sina}_y(b)\\ \mathrm{Sina}_y(\frac{a}{b})=\mathrm{Sina}_y(a)\mathrm{Cosa}_y(b)-\mathrm{Cosa}_y(a)\mathrm{Sina}_y(b)\\ \mathrm{Cosa}_y(1)=1\\ \mathrm{Sina}_y(1)=0\\ \mathrm{Cosa}_y(\frac{1}{a})=\mathrm{Cosa}_y(a)\\ \mathrm{Sina}_y(\frac{1}{a})=-\mathrm{Sina}_y(a)\\ \mathrm{Cosa}_{2y}(a)+\mathrm{Cosa}_{2y}(b)=2.\mathrm{Cosa}_y(ab).\mathrm{Cosa}_y(\frac{a}{b})\\ \mathrm{Sina}_{2y}(a)+\mathrm{Sina}_{2y}(b)=2.\mathrm{Sina}_y(ab).\mathrm{Cosa}_y(\frac{a}{b})\end{gathered}$$

$$\text{Sina}_{2y}(a) = 2.\text{Cosa}_y(a)\text{Sina}_y(a)$$

$$\text{Cosa}_y(a)^2 + \text{Cosa}_y(b)^2 - \text{Cosa}_y(ab).\text{Cosa}_y(\frac{a}{b}) = 1$$

$$\text{Cosa}_y(a^2) = \text{Cosa}_{2y}(a)$$

$$\text{Sina}_y(a^2) = \text{Sina}_{2y}(a)$$

$$\text{Cosa}_y(a).\text{Cosa}_y(b) = \frac{\text{Cosa}_y(ab) + \text{Cosa}_y(\frac{a}{b})}{2}$$

$$\text{Sina}_y(a).\text{Sina}_y(b) = \frac{\text{Cosa}_y(\frac{a}{b}) - \text{Cosa}_y(ab)}{2}$$

$$\text{Cosa}_y(a).\text{Cosa}_y(b).\text{Cosa}_y(c) = \frac{\text{Cosa}_y(abc) + \text{Cosa}_y(\frac{ab}{c}) + \text{Cosa}_y(\frac{ac}{b}) + \text{Cosa}_y(\frac{bc}{a})}{4}$$

Remarque la fonction utilisée dans le premier chapitre peut maintenant s'écrire sous une autre forme :

$$Q(l) = \left[\delta_{l=1}(l) + \sum_{\substack{m\wedge k=1 \\ mk=l, m>k}} 2\Re\left(\frac{\chi(m)}{m^{iy}}\frac{\overline{\chi(k)}}{k^{iy}}\right)\right]$$
$$= [\text{Cosa}_y \times \Re\chi \,\square\, \text{Sina}_y \times \Im\chi][l]$$

Avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star\ \forall p \in \mathbb{P}\ :\ \Re\chi[p^n] = \Re(\chi(p^{v_p(n)}))$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star\ \forall p \in \mathbb{P}\ :\ \Im\chi[p^n] = \Im(\chi(p^{v_p(n)}))$$

Remarque On définit les trois fonctions suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0,1\},\ \forall a \in \mathbb{N} - \{0,1\} :\ \left[\mathop{\square}_{k=1}^{\phi(n)} \chi_k\right](a)$$

$$\forall l \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : \prod_{k=1}^{\phi(n)} \chi_k(l)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0,1\} : \sum_{l\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \prod_{k=1}^{\phi(n)} \chi_k(l)$$

Remarque Les fonctions présentées ci dessous sont simplement citées car il pourraient être utilisé (notamment la première formule) pour calculer des suites dépendantes de tous les caractères du même entier.

Les deux dernières fonctions présentes numériquement les observations suivantes :

$$\forall l \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : \prod_{k=1}^{\phi(n)} \chi_k(l) = \begin{cases} 0 \text{ si } l \wedge n > 1 \\ \pm 1 \text{ si non} \end{cases} = \begin{cases} \chi_{\frac{\phi(n)}{2}}(l) \text{ si ?} \\ -\chi_{\frac{\phi(n)}{2}}(l) \text{ si ?} \end{cases}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0,1\} : \sum_{l \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \prod_{k=1}^{\phi(n)} \chi_k\ (l) = \begin{cases} 0 \text{ si } \ ? \\ \phi(n) \ ? \end{cases}$$

Proposition 3.2.15

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0,1\},\ \forall a \in \mathbb{N} - \{0,1\} : \left[\mathop{\square}_{k=1}^{\phi(n)} \chi_k \right](a) = \phi(n)^{\omega(a)} \cdot \delta_{n|[Id_e - \mathbb{1}](a)}$$

Preuve

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} - \{0,1\}\ \forall a \in \mathbb{N} - \{0,1\} : \left[\mathop{\square}_{k=1}^{\phi(n)} \chi_k \right](a) &= \prod_{p|a} \sum_{k=1}^{\phi(n)} \chi_k(p^{\nu_p(a)}) \\ &= \prod_{p|a} \phi(n) \cdot \delta_{p^{\nu_p(a)} \equiv 1 \mod n} \\ &= \prod_{p|a} \phi(n) \cdot \delta_{p^{\nu_p(a)} - 1 \equiv 0 \mod n} \\ &= \phi(n)^{\omega(a)} \cdot \delta_{[\prod_{p|a} p^{\nu_p(a)} - 1] \equiv 0 \mod n} \\ &= \phi(n)^{\omega(a)} \cdot \delta_{[\mathrm{Id}_e - \mathbb{1}](a) \equiv 0 \mod n} \\ &= \phi(n)^{\omega(a)} \cdot \delta_{n|[\mathrm{Id}_e - \mathbb{1}](a)} \end{aligned}$$

Remarque il serait intéressant de pouvoir amortir les oscillations des séries qui convergent au sens de Cesàro sans converger. la solution parfaite est de trouver pour chaque fonction multiplicative dont la série de Dirichlet ne converge pas mais qui converge au sens de Cesàro , une fonction multiplicative qui convergerait vers la limite de Cesàro .

References

[1] H. M. Edwards : Riemann's Zeta Function. Dover publications , New York.

[2] E. C. Titchmarsh : The Theory of the Riemann Zeta Function. Clarendon Press - Oxford , University of oxford.

[3] André LeClair : An electrostatic depiction of the validity of the Riemann Hypothesis and a formula for the N-th zero at large N. ArXiv .

[4] André LeClair , Guilherme França : Statistical and other properties of Riemann zeros based on an explicit equation for the n-th zero on the critical line. ArXiv .

[5] André LeClair , Guilherme França : On the zeros of L-functions ArXiv .

[6] André LeClair , Guilherme França : A theory for the zeros of Riemann Zeta and other L-functions ArXiv .

[7] André LeClair , Guilherme França : On the validity of the Euler product inside the critical strip ArXiv .

[8] André LeClair , Guilherme França : Transcendental equations satisfied by the individual zeros of Riemann zêta, Dirichlet and modular L-functions ArXiv .

[9] André LeClair , Guilherme França : Some Riemann Hypotheses from Random Walks over Primes ArXiv .

[10] André LeClair , Guilherme França : Riemann Hypothesis and Random Walks: the Zeta case ArXiv .

[11] Bernhard Riemann . Translated by David R. Wilkins 1998 : On the Number of Prime Numbers less than a Given Quantity. Clay Math .

[12] Hisashi Kobayashi : Local Extrema of the chi(t) Function and The Riemann Hypothesis. ArXiv .

[13] Marc Hindry : présentation de la preuve par andré weil de l'hypothèse de riemann pour une courbe sur un corps fini. Polytechnique .

[14] Branko DRAGOVICH : on adelic strings. Institut mathématique de Mathématiques de Jussieu ArXiv.

[15] Michel Paugam : Sur certaines fonctions arithmétiques. Université de Caen Séminaire.

[16] V. SITARAMAIAH AND M. V. SUBBARAO : the identical equation in psi products. AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY AMS.

[17] Eckford Cohen : arithmetical functions associated with the unitary divisors of an integer. AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY AMS.

[18] R. VAIDYANATHASWAMY : the theory of multiplicative arithmetic functions. AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY AMS.

[19] Edmund Landau : New Proof of the Equation theisis .

[20] Alain Connes : An essay on the Riemann Hypothesis Arxiv .

[21] Alain Connes : Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function .

[22] Yang-Hui He, Zhi Hu, Malte Probst, James Read Yang-Mills Theory and the ABC Conjecture Arxiv .

[23] G.H. Hardy, E.M. Wright. an introduction to the theory of numbers Oxford .